CAPÍTULO 15

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

15.1 Introdução

Vamos agora retornar às funções reais de várias variáveis reais e estudar seus máximos e mínimos locais e globais.

DEFINIÇÃO 15.1.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de várias variáveis reais. Diz-se que $X_0 \in Dom(f)$ é um *ponto de máximo local* se existe uma bola aberta B, contendo X_0, tal que

$$f(X) \leq f(X_0), \;\; \forall \, X \in B \cap Dom(f).$$

Neste caso, $f(X_0)$ é chamado de *máximo local*.

DEFINIÇÃO 15.1.2: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de várias variáveis reais. Diz-se que $X_0 \in Dom(f)$ é um *ponto de mínimo local* se existe uma bola aberta B, contendo X_0, tal que

$$f(X) \geq f(X_0), \;\; \forall \, X \in B \cap Dom(f).$$

Neste caso, $f(X_0)$ é chamado de *mínimo local*.

Os pontos de máximo e de mínimo locais são chamados de *extremantes locais* e os máximos e mínimos locais são chamados de *extremos locais*

DEFINIÇÃO 15.1.3: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de várias variáveis reais. Diz-se que $X_0 \in Dom(f)$ é um *ponto de máximo global* ou *ponto de máximo absoluto* se

$$f(X) \leq f(X_0) \;\; \forall \, X \in Dom(f).$$

Neste caso, $f(X_0)$ é chamado de *máximo global* ou *máximo absoluto*.

DEFINIÇÃO 15.1.4: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de várias variáveis reais. Diz-se que $X_0 \in Dom(f)$ é um *ponto de mínimo global* ou *ponto de mínimo absoluto* se

$$f(X) \geq f(X_0) \ \ \forall \ X \in Dom(f).$$

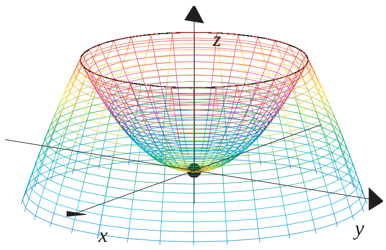
Neste caso, $f(X_0)$ é chamado de *mínimo global* ou *mínimo absoluto*.

Os pontos de máximo e de mínimo globais são chamados de *extremantes globais* ou *extremantes absolutos* e os máximos e mínimos globais são chamados de *extremos globais* ou *extremos absolutos*.

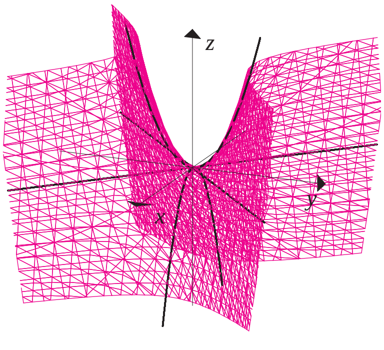
Exemplo 15.1.1: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2; & x^2+y^2 \leq 1 \\ 2-(x^2+y^2); & x^2+y^2 > 1 \end{cases}.$$

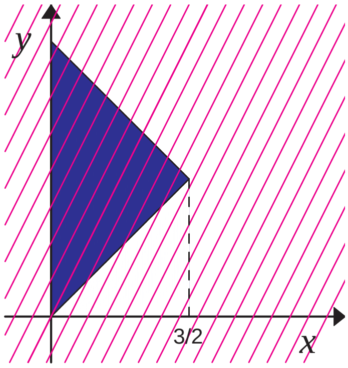
Esboce o gráfico de f e o use para determinar os extremos locais e globais de f, caso eles existam.



Exemplo 15.1.2: Seja $f(x,y) = y^2 - x^2$. Esboce o gráfico de f e o use para determinar os extremos locais e globais de f, caso eles existam.



Exemplo 15.1.3: Considere a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2x - y$, onde $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3 \text{ e } y \geq x\}$. Utilize as curvas de nível de f para estudar os extremos locais e globais de f.



15.2 Condições Necessárias para um Ponto do Interior do Domínio de f Ser um Extremante Local de f

Nesta seção, vamos apenas estudar pontos pertencentes ao interior do domínio de f. Desta forma, o domínio de f será ele próprio aberto, ou então, deve conter algum conjunto aberto A. Os teoremas apresentados nesta seção fornecem condições *necessárias* para que pontos interiores ao domínio de f possam se extremantes locais.

TEOREMA 15.2.1: Seja $\vec{u}$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^n$ e seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que existe $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0)$, onde X_0 é um ponto do interior de $Dom(f)$. Se X_0 é extremante local de f, então $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = 0$.

Demonstração: Vamos supor que X_0 é um ponto de máximo de f. Como X_0 é um ponto interior do domínio de f, temos que existe uma bola aberta A, contendo X_0, com $A \subseteq Dom(f)$, tal que

$$f(X) \leq f(X_0), \quad x \in A.$$

Desta forma, podemos garantir que existe um intervalo aberto $I = (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}$, tal que $X_0 + t\vec{u} \in A \subseteq Dom(f)$, onde

$$f(X_0 + t\vec{u}) \leq f(X_0), \quad t \in I.$$

Sendo assim, definindo a função

$$g(t) = f(X_0 + t\vec{u}), \quad t \in I,$$

observe que $t = 0$ é um ponto de máximo de g, uma vez que, por hipótese, X_0 é um ponto de máximo de f. Portanto, da teoria de extremos locais de funções reais de uma variável real, como I é aberto, se existe $g'(0)$, sabemos que $g'(0) = 0$. Mas, como

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{g(0+t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0), \end{aligned}$$

temos que $g'(0)$ existe (pois, por hipótese, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0)$ existe), de modo que, conforme desejado, podemos concluir que $g'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = 0$.

$\square$

Observe que fazendo $\vec{u} = e_i$, onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, temos o corolário a seguir.

Corolário 15.2.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas parciais em X_0, onde X_0 é um ponto do interior de $Dom(f)$. Se X_0 é extremante local de f, então $\nabla f(X_0) = \vec{0}$, i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0$, $i = 1, ..., n$.

Motivados pelo corolário acima, dizemos que X_0 é um *ponto crítico* ou *ponto estacionário* de f se X_0 é um ponto do interior de $Dom(f)$ e $\nabla f(X_0) = \vec{0}$. De posse desta definição, podemos reescrever o Corolário 15.2.1 da seguinte forma.

Corolário 15.2.2: (Corolário 15.2.1 reescrito) Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas parciais em X_0, onde X_0 é um ponto do interior de $Dom(f)$. Se X_0 é extremante local de f, então X_0 é um ponto crítico (ou estacionário) de f.

Observe que a condição do corolário acima é apenas *necessária*, não sendo suficiente. De fato, considere a função $f(x, y) = y^2 - x^2$. Neste caso, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, enquanto que o ponto $(0, 0)$ não é extremante local de f. Dizemos que X_0 é um *ponto de sela* de f se X_0 é um ponto crítico de f, mas não é um ponto de máximo ou mínimo de f.

Concluímos assim, do Corolário 15.2.1, que é somente no conjunto dos pontos críticos de f ou no conjunto de pontos que não admitem derivadas parciais, que iremos encontrar os pontos interiores ao domínio de f que são CANDIDATOS a extremantes locais de f. A eleição ou não do ponto como extremante local é uma outra história que precisa de um pouco mais de "política".

Observe ainda que se X_0 é um ponto da fronteira de $Dom(f)$, ele pode ser um extremante local de f sem que as derivadas parciais de f se anulem em X_0 (cf. Exemplo 15.1.3). Isto porque o corolário acima não se aplica para pontos na fronteira, ele é específico para pontos no interior do domínio. Os pontos da fronteira deverão ser analisados separadamente mais tarde.

Vamos agora fornecer mais um teorema com condições ainda *necessárias* para um ponto interior ao domínio ser um extremante local.

TEOREMA 15.2.3: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em A(aberto) $\subseteq Dom(f)$ e seja X_0 um ponto no aberto A.
i) Se X_0 é um ponto de máximo local, então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X_0) \leq 0$, $i = 1, ..., n$.
ii) Se X_0 é um ponto de mínimo local, então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X_0) \geq 0$, $i = 1, ..., n$.

Não vamos demonstrar este teorema, mas raciocinando com funções $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $Dom(f)$ é aberto, se $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ é um extremo local de f, é porque, numa vizinhança de (x_0, y_0), o gráfico de f se assemelha localmente a um vale ou a uma montanha. Desta forma, a interseção do gráfico de f com os planos $y = y_0$ e $x = x_0$ terá localmente um formato do tipo $\bigcap$ ou $\bigcup$. Lembrando então da teoria de máximos e mínimos para funções da reta na reta, temos que é a derivada segunda que fornece esta informação.

Exemplo 15.2.1: Determine os candidatos a pontos de máximos e mínimos locais de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

15.3 Condição Suficiente para um Ponto do Interior do Domínio de f Ser um Extremante Local de f

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f possui todas as derivadas parciais de segunda ordem em um conjunto aberto $A \subseteq Dom(f)$, podemos definir a matriz abaixo, que é chamada de *matriz Hessiana* de f em $X \in A$ e denotada por $H(X)$.

$$H(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(X) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(X) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(X) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(X) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(X) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(X) \end{pmatrix}$$

Observe que se f é de classe C^2 no aberto $A \subseteq Dom(f)$, a matriz Hessiana de f é simétrica para todo $X \in A$. O determinante da matriz Hessiana de f no ponto $X \in A$ é chamado de *Hessiano* de f em $X \in A$.

Note que se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 aberto $A \subseteq Dom(f)$, a matriz Hessiana de f em $(x,y) \in A$ é dada por

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

e o Hessiano de f em $(x,y) \in A$ é dado por

$$\begin{aligned} \det(H(X)) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} \\ &= \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2. \end{aligned}$$

Vamos apenas enunciar (sem demonstrar) o teorema que fornece uma condição *suficiente* para um ponto crítico ser ponto de máximo ou mínimo local no caso de uma função de duas variáveis reais. Confira abaixo.

TEOREMA 15.3.2: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em A(aberto) $\subseteq Dom(f)$ e seja (x_0, y_0) um ponto no aberto A. Suponha que (x_0, y_0) é um ponto crítico de f.

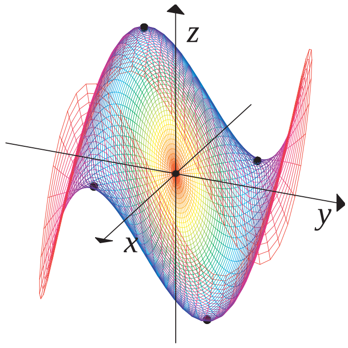
i) Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $\det(H(x_0, y_0)) > 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local de f.

ii) Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $\det(H(x_0, y_0)) > 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f.

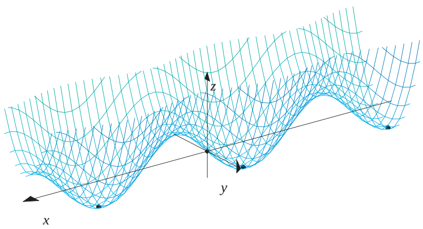
iii) Se $\det(H(x_0, y_0)) < 0$, então X_0 não é um ponto de mínimo nem de máximo local de f. Neste caso, (x_0, y_0) é um ponto de sela.

iv) Se $H(x_0, y_0) = 0$, então nada se pode afirmar.

Exemplo 15.3.1: Classifique os pontos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

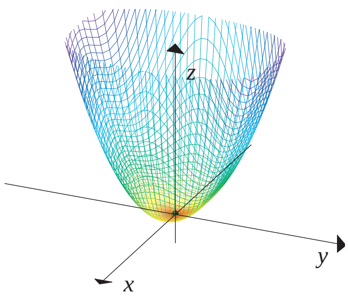


Exemplo 15.3.2: Classifique os pontos críticos de $f(x, y) = y^2 + \operatorname{sen} x$.

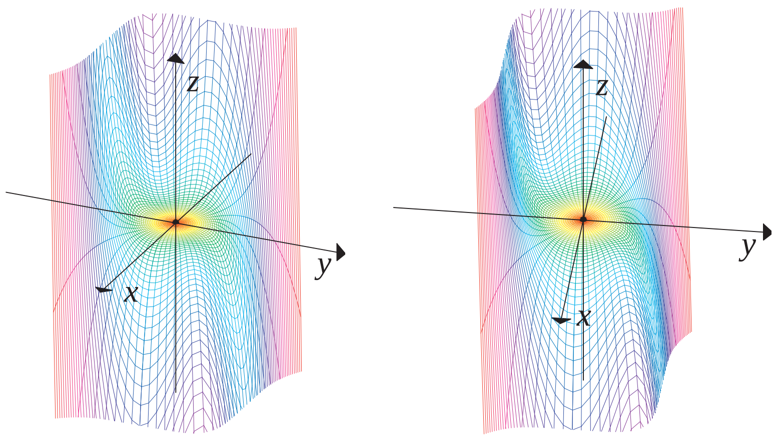


Nos exemplos a seguir, veremos que nada podemos afirmar através do Hessiano, mostrando que é necessária uma análise extra.

Exemplo 15.3.3: Classifique os pontos críticos de $f(x, y) = 3x^4 + 2y^2$.



Exemplo 15.3.4: Classifique os pontos críticos de $f(x, y) = x^5 + 2y^5$.



Agora, vamos enunciar (sem demonstrar) o teorema que fornece uma condição *suficiente* para um ponto crítico ser ponto de máximo ou mínimo local no caso de uma função de n variáveis reais. Confira abaixo.

TEOREMA 15.3.3: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em A(aberto) $\subseteq Dom(f)$ e seja X_0 um ponto no aberto A. Suponha que X_0 é um ponto crítico de f, i.e. $\nabla f(X_0) = 0$, e que $\det(H(X_0)) \neq 0$.
i) Se os autovalores de $H(X_0)$ são todos positivos, então X_0 é um ponto de mínimo local de f.
ii) Se os autovalores de $H(X_0)$ são todos negativos, então X_0 é um ponto de máximo local de f.
iii) Se $H(X_0)$ possui, pelo menos, um autovalor positivo e, pelo menos, um autovalor negativo, então X_0 é um ponto de sela de f.

Exemplo 15.3.5: Determine e classifique os pontos críticos da função abaixo.

$$f(x, y, z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z$$